შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 11

03.05.2014/ მათ/III/ M303

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$$\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2a_3}+\dots+\frac{a_k^3}{a_k^2+a_{k+1}a_{k+2}}+\dots+\frac{a_n^3}{a_n^2+a_1a_2} \geq \frac{a_1+\dots+a_n}{2}$$

$$\frac{a_i^3}{a_i^2+a_{i+1}a_{i+2}}-a_i=-\frac{a_ia_{i+1}a_{i+2}}{a_i^2+a_{i+1}a_{i+2}} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a_{n+1}=a_1 \\ a_{n+2}=a_2 \end{matrix}}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{a_1a_2a_3}{a_1^2+a_2a_3}+\dots+\frac{a_na_1a_2}{a_n^2+a_1a_2}\right) \geq -\frac{a_1+\dots+a_n}{2}$$

გავამრავლოთ მინუსზე ანუ დასამტკიცებელი გვაქვს

$$\frac{a_1a_2a_3}{a_1^2+a_2a_3}+\dots+\frac{a_na_1a_2}{a_n^2+a_1a_2} \leq \frac{a_1+\dots+a_n}{2}$$

$$\frac{a_ia_{i+1}a_{i+2}}{a_i^2+a_{i+1}a_{i+2}} \leq \frac{a_ia_{i+1}a_{i+2}}{2a_i\sqrt{a_{i+1}a_{i+2}}}=\frac{\sqrt{a_{i+1}a_{i+2}}}{2} \leq \frac{a_{i+1}+a_{i+2}}{4}$$

$$a_i^2+a_{i+1}a_{i+2} \geq 2a_i\sqrt{a_{i+1}a_{i+2}} \Rightarrow$$

$$\frac{a_1a_2a_3}{a_1^2+a_2a_3}+\dots+\frac{a_na_1a_2}{a_n^2+a_1a_2} \leq \frac{a_2+a_3}{4}+\frac{a_3+a_4}{4}+\dots+\frac{a_n+a_1}{4}+\frac{a_1+a_2}{4}$$

$$=\frac{a_1+\dots+a_n}{2}$$

~~[illegible]~~ რ.ს.დ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

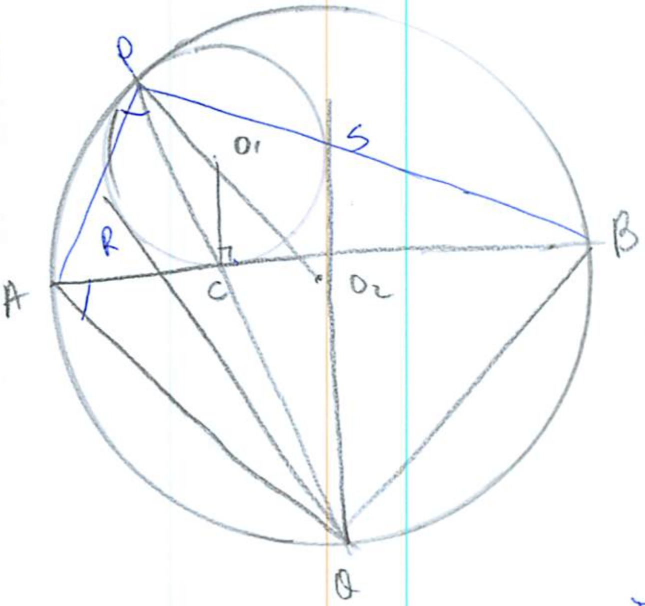
შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 11	03.05.2014/ მათ/III/ M303
ამოცანა № 2	გვერდი № 1

დავამტკიცოთ რომ 1) Q - შუაწერტილია AB რკალის
2) ARSB წრეწირის ცენტრია Q
3) Z-ის ამ წრეწირზეა.

1)



~~$PO_1 = O_1C$~~

~~და~~ ცხადია P, O_1 და O_2 ერთ წრფეზეა

$PO_1 = O_1C$ და $PO_2 = O_2Q$ რადიუსები არიან და იმიტომ $\Rightarrow \angle O_1PC = \angle O_1CP$ და $\angle O_1PC = \angle O_2QC \Rightarrow$ $O_2Q \parallel CO_1 \Rightarrow O_1C \perp AB \Rightarrow$ $\Rightarrow QO_2 \perp AB$ ანუ AB-ს შუა წერტილია ანუ Q AB რკალის შუაწერტილია

2) $AQ = QB$ რადგან რკალის შუაწერტილია და ასევე $\angle APQ = \angle QPB = \angle QAB = \angle QBA \Rightarrow \Delta QAC \sim \Delta QPA \Rightarrow$ $\Rightarrow AQ^2 = BQ^2 = QC \cdot QP = QR^2 = QS^2 \Rightarrow AQ = QB = QR = QS$ ანუ ARSB-ზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრია Q.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

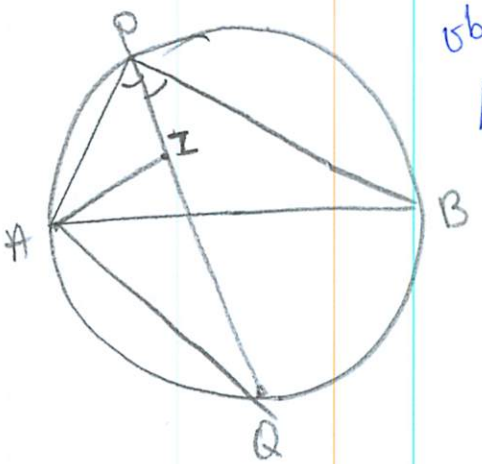
მაგიდა № 11

03.05.2014/ მათ/III/ M303

ამოცანა № 2

გვერდი № 2

3)



ცხადია $Z \in PQ$ დავამტკიცოთ რომ $AQ = AQZ$

$\angle AZQ = \angle APQ + \angle ZAP =$

$= \angle QAB + ZAB = \angle ZAQ \Rightarrow$

$\Rightarrow AQ = QZ$ ანუ $Z \in \omega_{ARSB}$

RS-ის გადაკვეთა P-ზე გავლებულ მხებთან იქნება AB-ზე რადიკალური ღერძების თეორემის თანახმად ~~რ.ღ. $\omega_{ARSB} \cap \omega_{PRCS} \cap$~~ რ.ღ. $(\omega_{ARSB} ; \omega_{RPCS})$, რ.ღ. $(\omega_{ARSB} ; \omega_{QAPB})$, რ.ღ. $(\omega_{APBQ} ; \omega_{CRPS})$ ან ერთ წერტილში იკვეთება ან პარალელურნი გამორიცხულია რადგან P არ არის AB რკალის შუაწერტილი. ამიტომ ერთ წერტილში იკვეთებიან

თითოეულ რიცხვს რომ k დავუმატოთ ამით ახალი შეიცვლება რადგან $\dfrac{a+k-(b+k)}{(c+k)-(d+k)} = \dfrac{a-b}{c-d}$ ასევე

k-ად გამოვიყენოთ. და დავუმატოთ k ყველას ისე რომ მინიმალური გახდეს 0-ის ტოლი =>

$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{2000}$ $\quad a_1 = 0$ ავიღოთ

$(a_{2000} ; a_1)$ და $(a_{1999} ; a_1)$ =>

=> $\cancel{a_{2000} - a_1}$ $\dfrac{a_{1999} - a_1}{a_{2000} - a_1} < 1 \Rightarrow 1 - \dfrac{a_{1999}}{a_{2000}} \geq \dfrac{1}{10^5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{10^5 - 1}{10^5} \geq \dfrac{a_{1999}}{a_{2000}}.$

$\dfrac{a_{2000} - a_1}{a_{1999} - a_1} > 1 \Rightarrow \dfrac{a_{2000}}{a_{1999}} \geq \dfrac{10^5 + 1}{10^5}$

იგივე წესით შევადაროთ i და j-სთვის თუ $i > j$ მაშინ $\dfrac{a_j}{a_i} \le \dfrac{10^5 - 1}{10^5}$